מספר תעודת זהות
יש לרשום את כל תשע הספרות

יש להדביק כאן את מדבקת הנבחן

האוניברסיטה הפתוחה

י"ח בתמוז תשפ"ה

מס' שאלון - 547

14
ביולי 2025

סמסטר 2025ב

מס' מועד 87

4 / 20942

שאלון בחינת גמר

20942 - מבוא ללמידה חישובית

משך בחינה: 3 שעות

בשאלון זה **4** עמודים

מבנה הבחינה:

במבחן 3 שאלות, יש לענות על כל השאלות.

אלא אם מצוין אחרת, יש לפתח ו/או להסביר כל תשובה.

יש להוסיף תיאור מלא לכל שרטוט.

דאגו להיות ברורים מסודרים ומדויקים בתשובותיכם
והראו את כל השלבים הרלוונטיים לפתרון.

הסברים קצרים ולעניין עדיפים על הסברים ארוכים שאינם מראים הבנה.

תשובה נכונה ללא הסבר לא תקבל ניקוד מלא
ויתכן אף שלא תקבל ניקוד כלל.
לעומת זאת, תשובה סופית לא נכונה שתלווה בפתרון והסברים
אשר מראים הבנה מלאה תקבל ניקוד.

חומר עזר:
3 דפי A4 כתובים משני הצדדים.
לפי נהלי האוניברסיטה אי אפשר להשתמש בזכוכית מגדלת.

בהצלחה !!!

החזירו
למשגיח את השאלון
וכל עזר אחר שקיבלתם בתוך מחברת התשובות

שאלה 1 (36 נקודות)

נתונה פונקציית העלות:

$$J(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{w}^{\mathrm{T}} A \boldsymbol{w} + \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{w} + \alpha, \qquad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$$

כאשר $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ היא מטריצה סימטרית ו- positive-definite, $\boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^d$ הוא וקטור, ו- $\alpha \in \mathbb{R}$ הוא סקלר.

א. **(9 נקודות)** מצאו את הגראדינט $\nabla_{\boldsymbol{w}} J(\boldsymbol{w})$, ורשמו ביטוי סגור עבור נקודת הקיצון $\boldsymbol{w}^*$ שממזערת את הפונקציה $J(\boldsymbol{w})$.

ב. **(9 נקודות)** כתבו את כלל העדכון בשיטת Gradient Descent עבור פונקציית העלות $J(\boldsymbol{w})$, בהינתן גודל צעד $\varepsilon > 0$.

ג. **(9 נקודות)** יהי $\boldsymbol{w}^{(k)}$ וקטור המקדמים באיטרציה k של אלגוריתם ה- Gradient Descent ויהי $\boldsymbol{e}^{(k)} = \boldsymbol{w}^{(k)} - \boldsymbol{w}^*$ וקטור השגיאה. הביעו את $\boldsymbol{e}^{(k+1)}$ כפונקציה של $\boldsymbol{e}^{(k)}$ בצורה הבאה:

$$, \boldsymbol{e}^{(k+1)} = Q \boldsymbol{e}^{(k)}$$

וקיבעו את המטריצה Q בצורה מפורשת באמצעות הגדלים $\mathrm{A}, \mathbf{b}, \alpha, \varepsilon$.

ד. **(9 נקודות)** הראו כי אם מתקיים ש-

$$, \quad 0 < \varepsilon < 1/\lambda_{max}$$

כאשר λ_{max} הוא הערך העצמי המקסימלי של המטריצה A , אז נורמת השגיאה קטנה בכל איטרציה:

$$, \left\| \boldsymbol{e}^{(k+1)} \right\| < \left\| \boldsymbol{e}^{(k)} \right\|, k = 0,1,2, \ldots$$

והסיקו כי $\boldsymbol{w}^{(k)}$ מתכנס לנקודת המינימום $\boldsymbol{w}^*$.

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 2 (28 נקודות)

אלגוריתם K-means הסטנדרטי מניח שישנה גישה מלאה לכל התצפיות, אשר נטענות כולן לזיכרון בתחילת הריצה. לעיתים קרובות, התצפיות מתקבלות בצורה סדרתית (data stream) ומעובדות לפי הסדר ולא נשמרות בזיכרון. בבעיה זו נבחן כיצד ניתן להרחיב את אלגוריתם K-means כך שיתאים לתצפיות שמגיעות בצורה סדרתית.

נניח שישנם k אשכולות (clusters):

- מאתחלים את מרכזי האשכולות באופן אקראי.
- בכל פעם שמגיעה תצפית $x \in \mathbb{R}^d$:

1. מוצאים את האשכול שמרכזו הכי קרוב ל- x מבחינת מרחק אוקלידי, ומשייכים את x לאותו אשכול.
2. מעדכנים את מרכז האשכול כך שישקף את הממוצע של כל התצפיות ששויכו לו עד כה.

האלגוריתם מחזיר את מרכזי האשכולות לאחר עיבוד כל התצפיות בסדרה.

ענו על השאלות הבאות בהתאם להגדרה זו של האלגוריתם:

א. **(9 נקודות)** ציינו אילו משתנים נשמרים בזיכרון לאורך זמן ומהם ערכי האתחול שלהם.

ב. **(10 נקודות)** כאשר מתקבלת תצפית x, פרטו את העדכונים שיש לבצע לכל אחד מהמשתנים שנשמרים בזיכרון, באופן שמאפשר לשמר את ממוצעי האשכולות לאורך הסדרה.

ג. **(9 נקודות)** נניח שבכל איטרציה, יחד עם התצפית x מתקבל גם משקל חיובי $w > 0$, ואנו מעוניינים לעדכן את מרכזי האשכולות כך שישקפו ממוצע משוקלל של התצפיות באשכול. כיצד תתאימו את מנגנון העדכון מסעיף ב' לתמיכה בעדכון משוקלל? פרטו אילו משתנים חדשים יש להחזיק, ומהם כללי העדכון עבורם.

המשך הבחינה בעמוד הבא

שאלה 3 (36 נקודות)

נתונה קבוצת אימון הכוללת ארבע תצפיות. כל תצפית מורכבת מוקטור תכונות (features) המסומן באות $\boldsymbol{x}$, ומתוייגת בערך בינארי y (התגית), כאשר $+1$ מייצג מחלקה אחת ו- -1 מייצג את המחלקה השניה:

- $\boldsymbol{x_1} = [\mathbf{1},\mathbf{1}]^{\boldsymbol{T}}, y_1 = +1$
- $\boldsymbol{x_2} = [\mathbf{1},\mathbf{2}]^{\boldsymbol{T}}, y_2 = +1$
- $\boldsymbol{x_3} = [\mathbf{3},\mathbf{3}]^{\boldsymbol{T}}, y_3 = -1$
- $\boldsymbol{x_4} = [\mathbf{3},\mathbf{4}]^{\boldsymbol{T}}, y_4 = -1$

א. **(9 נקודות)** שרטטו את גבול ההחלטה של המסווג הלינארי האופטימלי בעל השוליים המירביים (Hard-margin SVM).

ב. **(9 נקודות)** חשבו את הפרמטרים האופטימליים של המסווג הלינארי האופטימלי עם השוליים המירביים.

הניחו שבשלב מסוים נוספת תצפית חדשה $\boldsymbol{x_5}$ לקבוצת האימון, עם תגית $y_5 = +1$.

ג. **(9 נקודות)** סמנו את האיזור במישור שבו מיקום התצפית החדשה ימנע את האפשרות להפריד את חמש התצפיות באמצעות על-מישור לינארי, כך שכל התצפיות שתוייגו כשליליות יימצאו בצד אחד של העל-מישור וכל התצפיות שתוייגו כחיוביות יימצאו בצידו השני.

ד. **(9 נקודות)** סמנו את כל המיקומים במישור אשר אם תציבו בהם את $\boldsymbol{x_5}$, אז כל חמש התצפיות תהיינה על השוליים של המסווג הלינארי האופטימלי בעל השוליים המירביים.

ב ה צ ל ח ה !